Представления

Представлением группы называется способ представить элементы групп в виде элементов некого линейного пространства.

Ведь элементы группы – это нечто абстрактное. Мы знаем лишь, что $g_1 g_2$ также $\in G$ и про существование обратного элемента. А представление – это способ «пощупать» элементы группы.

Давайте ещё раз – с другого ракурса. Представим, что нам нужно описать поворот трёхмерного действительного вектора. Мы можем это сделать вот такой матрицей поворота 3х3:

$$\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{matrix} = \text{матрица 3x3 от } (\theta, \varphi) * \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{matrix}$$

Можем ли мы это сделать иначе? Вы удивитесь – можем.

Сопоставим вектору $\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$ спинор $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$. Из квантовой теории мы знаем, что зная спинор $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$, мы можем подсчитать средние значения проекции на любую ось, т.е. получить $\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$. В обратную сторону сложнее, но тоже реально.

И мы уже можем поворачивать спинор:

$$\begin{matrix} a_2 \\ b_2 \end{matrix} = \text{матрица 2x2} * \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \end{matrix}$$

А вот теперь смотрите. Матрицы 3х3 и 2х2, естественно, не равны друг другу. Как вообще могут быть равны матрицы равных размеров? Но элемент-то группы – поворот – один!

Таким образом, мы построили два представления одной и той же группы SU2 – в виде действительных матриц поворота 3х3 и комплексных матриц поворота 2х2.

А можно построить третье представление той же группы – в виде матриц 1х1, т.е. вообще чисел? Можно – с помощью кватернионов. Погуглите. Исторически сперва именно ими пытались описывать спин, но быстро поняли, что это очень неудобно.

Можно понять, что тем «хуже» числа, тем меньше размер матрицы. Когда числа действительны, нужно 3х3. Когда комплексные, хватает 2х2. А когда числа совсем поганые – кватернионы – можно и 1х1.

Разговор про представления не закончен, к ним мы ещё вернёмся.